Κεφάλαιο 1

Η μέθοδος της θετικής πιθανότητας

1.1 Η ουσία της πιθανοτικής μεθόδου

Ο όρος πιθανοτική μέθοδος αναφέρεται σε ένα ευρύτατο σύνολο μαθηματικών τεχνικών που δύσκολα μπορούν να αντιμετωπιστούν σα μία μοναδική μέθοδος. Πολύ περισσότερο που το φάσμα των χρησιμοποιούμενων από την πιθανοτική μέθοδο τεχνικών δεν αποτελεί ένα κλειστό, οριστικά διαμορφωμένο σύνολο, αλλά αναπτύσσεται μέσα στο χρόνο, προσθέτοντας στα αρχικά, κλασσικά πιθανοθεωρητικά εργαλεία (π.χ. τις μέσες τιμές και τις ροπές τυχαίων μεταβλητών) νεότερες ισχυρές τεχνικές με χαρακτηριστικότερες το Θεώρημα Τοπικότητας και τις μεθόδους των ακολουθιών διατήρησης (martingales) και των μαρκοβιανών αλυσίδων.

Επίσης, η πιθανοτική μέθοδος δεν είναι δυνατό να προσδιορισθεί μονοσήμαντα με κριτήριο τις περιοχές στις οποίες χρησιμοποιείται, αφού αποτελεί μια γενική μέθοδο με πολυάριθμες εφαρμογές σε μια μεγάλη συλλογή από διαφορετικά μεταξύ τους πεδία έρευνας.

Ωστόσο, υπάρχει ένας ενιαίος, θεμελιώδης πυρήνας της πιθανοτικής μεθόδου που διαπερνά με συνεκτικό τρόπο το σύνολο των τεχνικών της και αποκαλύπτει τη βαθύτερη εσωτερική λογική και στόχευσή της. Πρόκειται για τη χρησιμοποίηση της μεθόδου για τη μη κατασκευαστική (nonconstructive) απόδειξη ύπαρξης συνδυαστικών δομών (combinatorial structures), που πληρούν συγκεκριμένες επιθυμητές ιδιότητες. Στη γενική μορφή της η πιθανοτική μέθοδος επιτυγχάνει αυτήν την απόδειξη ύπαρξης με την ακόλουθη διαδικασία:

- Κατασκευάζοντας (με τη χρήση νοητών τυχαίων πειραμάτων) με κατάλληλο τρόπο έναν πιθανοτικό δειγματοχώρο δομών, συνήθως πεπερασμένου πληθάριθμου.
- Αποδεικνύοντας ότι η υπό εξέταση ιδιότητα ισχύει σε αυτόν τον κατασκευασμένο δειγματοχώρο με θετική (μη μηδενική) πιθανότητα.

Η θετική πιθανότητα αποδεικνύει (με βάση τον αξιωματικό, θεμελιώδη ορισμό της έννοιας της πιθανότητας) την ύπαρξη τουλάχιστον μιας δομής (στον τυχαία κατασκευασμένο χώρο δομών) που πληρεί τη ζητούμενη ιδιότητα.

Θα μπορούσε κανείς να αντιτείνει, ότι η έννοια της πιθανότητας δεν είναι ουσιαστική στην παραπάνω περιγραφείσα αποδεικτική διαδικασία και ότι ενδεχομένως θα μπορούσε να παρακαμφθεί από την έννοια της απαρίθμησης (counting). Αλλωστε η πιθανότητα, στις περισσότερες περιπτώσεις (και ακριβώς επειδή η συντριπτική πλειοψηφία των δειγματοχώρων που η μέθοδος κατασκευάζει είναι πεπερασμένοι), προκύπτει διαιρώντας τον αριθμό των δομών που πληρούν την υπό εξέταση ιδιότητα με το συνολικό αριθμό των κατασκευασμένων τυχαίων δομών. Θεωρητικά, η επιχειρηματολογία αυτή είναι θεμιτή. Ωστόσο, τα πράγματα είναι διαφορετικά (όσον αφορά τον αποτελεσματικό χειρισμό των εννοιών αυτών) στην πράξη: είναι σχεδόν αδύνατο σε μια σειρά από σύνθετες τεχνικές (π.χ. στη μέθοδο της δεύτερης ροπής, στο Θεώρημα Τοπικότητας κτλ.) να αντικαταστήσει κανείς την πιθανότητα με επιχειρήματα απαρίθμησης (counting arguments) των εμφανιζόμενων συνδυαστικών δομών.

1.2 Η γέννηση της πιθανοτικής μεθόδου

Συνηθίζεται στη σχετική βιβλιογραφία να επιχειρείται η εισαγωγή στην πιθανοτική μέθοδο χρησιμοποιώντας το ίδιο πάντα παράδειγμα: την εφαρμογή της στον υπολογισμό κάτω φραγμάτων (lower bounds) αριθμών Ramsey. Η προτίμηση αυτή δεν αποτελεί απλή σύμπτωση. Αντίθετα, οφείλεται σε μια σειρά από σημαντικούς λόγους.

Το 1947, ο Ούγγρος μαθηματικός Paul Erdös σε ένα άρθρο τριών σελίδων με τίτλο "Ορισμένες παρατηρήσεις για τη θεωρία των γράφων" ("Some remarks on the theory of graphs", [18]) διαπραγματεύεται από τη σκοπιά μιας νέας μεθόδου τον υπολογισμό τέτοιων φραγμάτων. Αν και ήδη από το 1943 (από τον Szele, [64]) είχαν επιχειρηθεί παρόμοιες προσεγγίσεις, το άρθρο του Erdös θεωρείται η ιδρυτική πράξη της πιθανοτικής μεθόδου και ο ίδιος αναγνωρίζεται καθολικά σαν ο θεμελιωτής της νέας αυτής μεθόδου. Και αυτό γιατί για πρώτη φορά στην ιστορία παρουσιάζεται η υπό γέννηση μέθοδος με πληρότητα και γενικότητα και ανιχνεύονται οι τεράστιες δυνατότητές της στο να δίνει επιτυχείς λύσεις σε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών προβλημάτων.

Επίσης, η συγκεκριμένη εφαρμογή αναδεικνύει το σύνολο των αρετών της πιθανοτικής μεθόδου: τη σαφήνεια, την κομψότητα, τη συντομία και τη δυνατότητα επίλυσης εξαιρετικά δύσκολων υπολογιστικών προβλημάτων. Είναι χαρακτηριστικό από την άποψη αυτή ότι ο ακριβής υπολογισμός των αριθμών Ramsey παραμένει μέχρι και σήμερα ένα ανοιχτό μαθηματικό πρόβλημα, ακόμα και για τα πρώτα μέλη της οικογένειας των αριθμών αυτών. Ο υπολογισμός άνω και κάτω φραγμάτων αποτελεί το μοναδικό μέχρι τώρα τρόπο ικανοποιητικής προσέγγισής τους. Στο άρθρο του Erdös υπολογίζονται κάτω φράγματα για τους αριθμούς Ramsey, αναδεικνύοντας έτσι τη δυνατότητα που προσφέρει η πιθανοτική μέθοδος για την ικανοποιητική αντιμετώπιση δυσκολότατων μαθηματικών προβλημάτων και μάλιστα με απλό και σύντομο τρόπο.

Ακολουθούν, με στόχο την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου, ορισμένα διαφωτιστικά παραδείγματα, με πρώτο την ιστορική μελέτη του Erdös για τους αριθμούς Ramsey.

1.3 Αριθμοί Ramsey

Είναι εύκολο να αποδειχθεί (χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις έννοιες της θεωρίας γράφων, βλ. [32]) ότι για έναν γράφο με τουλάχιστον έξι κορυφές, είτε ο ίδιος ο γράφος είτε ο συμπληρωμα-